Università di Bologna – Campus di Rimini – Corso di laurea in Farmacia e CQPS

Esame MATEMATICA 01/07/2014 – Docente: Stefano Bordoni

STUDENTE: ___________________________; CORSO di LAUREA: ____________

MATRICOLA: ________; N° documento: _____________; FIRMA: ____________

1. Calcolare $\log_{1/2}(4)$, $\log_k(\frac{1}{k^3})$, $\log_k(\sqrt[2]{k^3})$, $\frac{n!}{(n-1)!+(n-2)!}$ [4]

2. Risolvere: $3^{3x} \geq \frac{1}{3}$, $\log_4(6-x^2) < 1$, $\log_{\frac{1}{3}}(4-x^2) > -1$ [5]

3. Supponendo equiprobabile la nascita di maschi e femmine, qual è la probabilità che una coppia di mammiferi generi 2 maschi e 6 femmine in una nidiata di 8 figli? [3]

4. Eseguire lo studio globale della funzione $y = f(x) = \frac{1}{x-1}$, cioè determinare dominio, grafico e codominio. [3]

5. Determinare la funzione derivata e una funzione primitiva della stessa funzione $y = f(x) = \frac{1}{x-1}$. [3]

x x x x x x x

6. Eseguire lo studio analitico della funzione $y = \frac{1}{x^2-1}$ (è accettabile anche uno studio globale accuratamente giustificato). [8]

7. Determinare dominio, grafico e codominio della funzione $y = f(x) = e^{-|x|}$. Controllare se *f(x)* è iniettiva, e motivare la risposta. [4]

<u>PER LA LODE</u>

Calcolare $\int_2^{2\sqrt{3}} \frac{1}{4+x^2} \cdot dx$.

VOTO: _______

# Farmacia e CQPS - Rimini Campus
## 01/07/2014

1) • $\left(\frac{1}{2}\right)^z = 4 \qquad (2^{-1})^z = 2^2 \qquad 2^{-z} = 2^2 \rightarrow -z = 2 \qquad \underline{\underline{z = -2}}$

• $\log_k \frac{1}{k^3} = \log_k (k^{-3}) = \underline{\underline{-3}}$

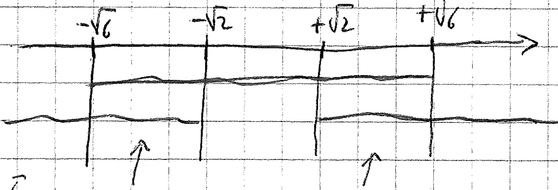
• $\log_k \sqrt[2]{k^3} = \log_k k^{3/2} = \underline{\underline{3/2}}$

• $\frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2)!}{(n-1) \cdot (n-2)! + (n-2)!} = \frac{n \cdot (n-1) \cdot \cancel{(n-2)!}}{\cancel{(n-2)!}\,[(n-1)+1]} = \frac{\cancel{n}\,(n-1)}{\cancel{n}} = \underline{\underline{n-1}}$

2) • $3^{3x} \geq 3^{-1} \rightarrow 3x \geq -1 \qquad \underline{\underline{x \geq -\frac{1}{3}}}$

• $\log_4 (6-x^2) < 1 \qquad \begin{cases} 6-x^2 > \emptyset \\ 6-x^2 < 4^1 \end{cases} \begin{cases} x^2-6 < \emptyset \\ 2-x^2 < \emptyset \end{cases} \begin{cases} x \in \,]-\sqrt{6}; +\sqrt{6}[ \\ x^2-2 > \emptyset \end{cases}$

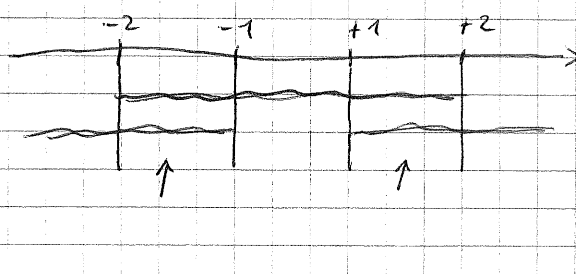
$\begin{cases} / \\ x \in \,]-\infty; -\sqrt{2}[ \,\cup\, ]+\sqrt{2}; +\infty[ \end{cases}$




$\Rightarrow \underline{\underline{x \in \,]-\sqrt{6}; -\sqrt{2}[ \,\cup\, ]+\sqrt{2}; +\sqrt{6}[}}$

• $\log_{1/3} (4-x^2) > -1 \qquad \begin{cases} 4-x^2 > \emptyset \\ 4-x^2 < \left(\frac{1}{3}\right)^{-1} \end{cases} \begin{cases} x^2-4 < \emptyset \\ 4-x^2 < 3 \end{cases} \begin{cases} x \in \,]-2; +2[ \\ 1-x^2 < \emptyset \end{cases}$

$\begin{cases} / \\ x^2-1 > \emptyset \end{cases} \begin{cases} / \\ x \in \,]-\infty; -1[ \,\cup\, ]+1; +\infty[ \end{cases}$



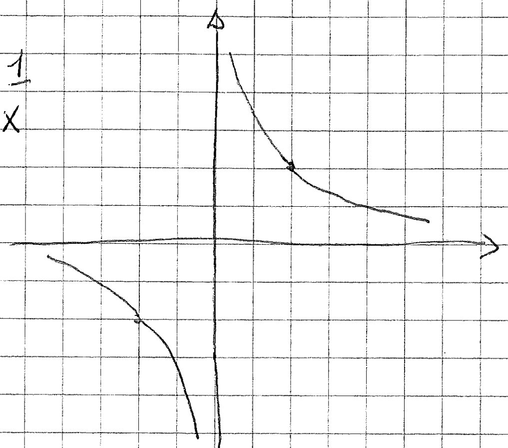

$\underline{\underline{x \in \,]-2; -1[ \,\cup\, ]+1; +2[}}$

3) $P = \dfrac{\binom{8}{2}}{2^8} = \dfrac{\binom{8}{6}}{2^8} = \dfrac{C_{8;6}}{2^8} = \dfrac{\frac{8!}{6!(8-6)!}}{2^8} = \dfrac{\frac{8\cdot 7\cdot \cancel{6!}}{\cancel{6!}\cdot 2!}}{2^8}$

$= \dfrac{\frac{8\cdot 7}{2}}{2^8} = \dfrac{\cancel{4}\cdot 7}{\cancel{2^2}\cdot 2^6} = \dfrac{7}{64}$

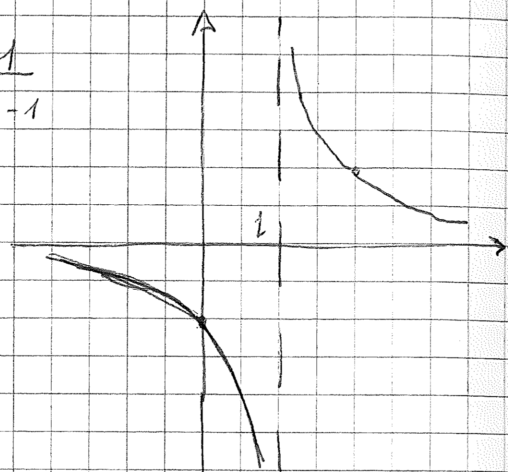
4)

$y = \dfrac{1}{x}$



$\xrightarrow[1\ dx]{T_x}$

$y = \dfrac{1}{x-1}$




D: $\mathbb{R} \setminus \{\phi\}$

Cd: $\mathbb{R} \setminus \{\phi\}$

D: $\mathbb{R} \setminus \{+1\}$

Cd: $\mathbb{R} \setminus \{\phi\}$

5) • $y = f'(x) = \dfrac{\phi\cdot(x-1) - 1\cdot 1}{(x-1)^2} = \dfrac{-1}{(x-1)^2}$

OPPURE $y = (x-1)^{-1} \Rightarrow y' = f'(x) = -1\cdot(x-1)^{-1-1}\cdot 1 = \dfrac{-1}{(x-1)^2}$

• Primitiva $y = P(x) = \ln|x-1| + \text{cost.}$

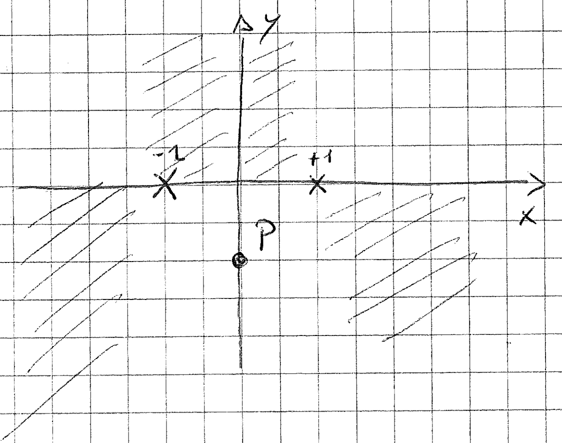
6) $y = \dfrac{1}{x^2-1}$ $\qquad x^2-1 \neq \phi \qquad x^2 \neq 1$

- Dominio: $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1; +1\}$

- La funzione è pari perché contiene solo potenze pari

$$f(-x) = \frac{1}{(-x)^2-1} = \frac{1}{x^2-1} \equiv f(x)$$

- $?\, x : \dfrac{1}{x^2-1} \geq \phi \qquad x^2-1 > \phi \qquad x \in \left]-\infty; -1\right[ \cup \left]+1; +\infty\right[$




La funzione non si annulla mai

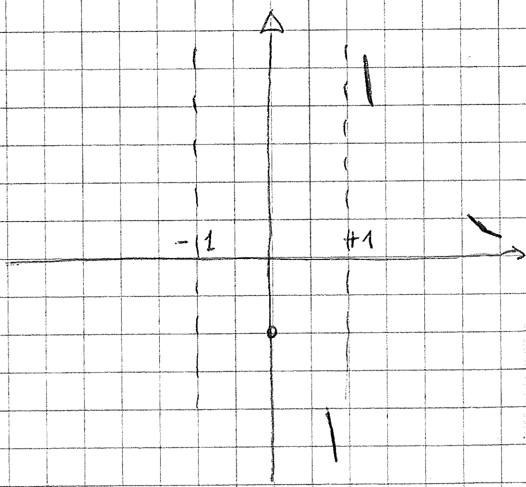
$f(\phi) = -1 \rightarrow P \equiv (\phi; -1)$

- Poiché la funzione è pari, quindi invariante per simmetria rispetto l'asse y, possiamo calcolare solo i limiti su $x \in \mathbb{R}^+$

$$\lim_{x \to +1^-} \frac{1}{x^2-1} = \frac{1}{(+1^-)^2-1} = \frac{1}{1^- - 1} = \frac{1}{\phi^-} = -\infty$$

$$\lim_{x \to +1^+} \frac{1}{x^2-1} = \frac{1}{(+1^+)^2-1} = \frac{1}{1^+ - 1} = \frac{1}{\phi^+} = +\infty$$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x^2-1} = \frac{1}{(+\infty)^2-1} = \frac{1}{+\infty} = \phi^+$$




- $y' = f'(x) = \dfrac{\phi \cdot (x^2-1) - 1 \cdot 2x}{(x^2-1)^2} = \dfrac{-2x}{(x^2-1)^2}$

$?\, x : f'(x) \geq \phi \rightarrow ?\, x : -2x \geq \phi \qquad x \leq \phi$

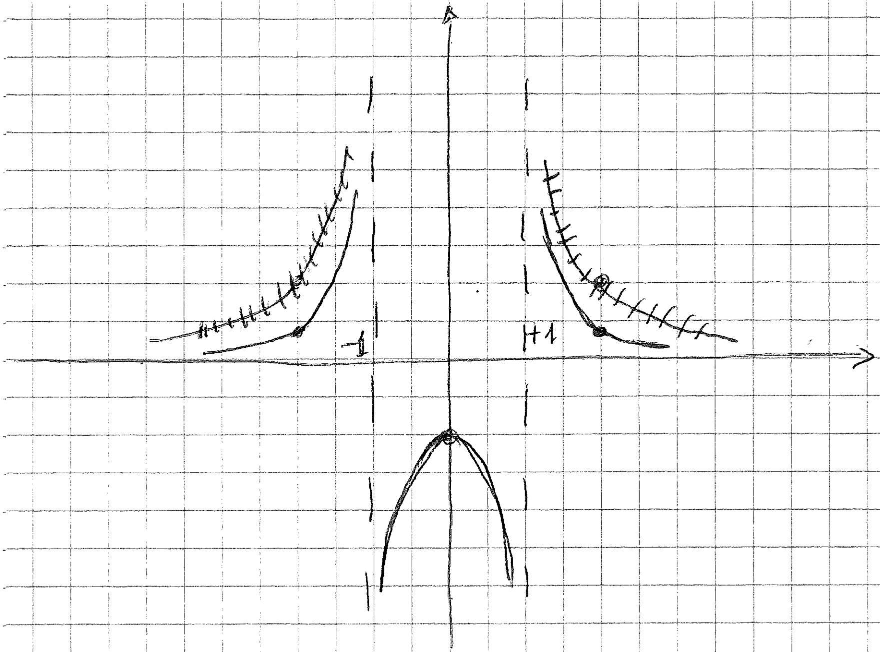
$\searrow ?\, x : (x^2-1)^2 \geq \phi \qquad \forall x \in \mathbb{R} \rightarrow$ SI ANNULLA SE $x \in \{-1; +1\}$

| | | $-1$ | | $\phi$ | | $+1$ | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| N | + | | + | o | − | | − |
| D | + | x | + | x | + | x | + |
| | (+) | $\nexists$ | (+) | $\phi$ | (−) | $\nexists$ | (−) |
| | ↗ | | ↗ | MAX | ↘ | | ↘ |

Punto di max locale

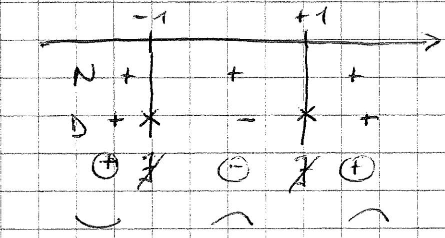
$M \equiv (\phi; -1)$

Non sono presenti punti di non derivabilità perché la derivata non esiste esattamente dove la funzione non esiste




Lo studio del segno della derivata seconda, in questo caso, non aggiunge significative informazioni.

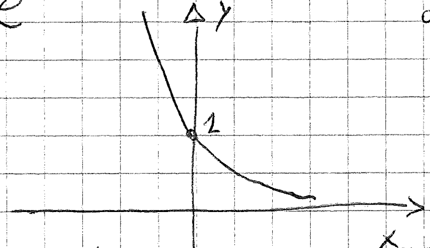
$$y'' = \frac{-2(x^2-1)^2 + 2x \cdot 2(x^2-1) \cdot 2x}{(x^2-1)^4}$$




Non sono presenti punti di flesso

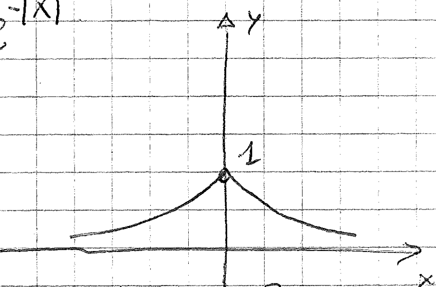
x x x x x

6) $y = e^{-x}$




La funzione diventa pari $\Longrightarrow$

$y = e^{-|x|}$




D: $\mathbb{R}$ ; Cod: $\mathbb{R}^+$

D: $\mathbb{R}$ ; Cod: $]\phi; 1]$

La funzione non è iniettiva perché non è strettamente crescente o strett. decrescente.

In altre parole, assume più di una volta uno stesso valore(y)

PER LA LODE: $\frac{1}{4}\int_2^{2\sqrt{3}} \frac{1}{1+\left(\frac{x}{2}\right)^2}dx = \frac{1}{2}\int_2^{2\sqrt{3}} \frac{1/2}{1+\left(\frac{x}{2}\right)^2}dx = \frac{1}{2}\left[\operatorname{arctg}\left(\frac{x}{2}\right)\right]_2^{2\sqrt{3}} =$

$= \frac{1}{2}\left[\operatorname{arctg}(\sqrt{3}) - \operatorname{arctg}(1)\right] = \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{2}\,\frac{\pi}{12} = \frac{\pi}{24}$